

به نام خدا

مبحث:

چند قانون مهم منطق

نکته


فرض کنیم φ و ψ دو جمله گزاره‌ای باشند. اگر بتوانیم ارزش راستی یکسانی به مؤلفه‌های φ و ψ بدهیم ولی ارزش‌های راستی متفاوتی برای φ و ψ به دست بیاید، φ و ψ به طور منطقی هم‌ارز نیستند.

در مسئله بعدی نشان می‌دهیم که جای قرار گرفتن پرانتزها در یک جمله گزاره‌ای، بسیار مهم است. توجه کنید که تغییر گروه‌بندی می‌تواند معنی جمله را عوض کند.

مسئله ۳. نشان دهید که جمله‌های $P \vee (Q \wedge \sim P)$ و $(P \vee Q) \wedge \sim P$ از لحاظ منطقی هم‌ارز نیستند.

حل. از جدول‌های ارزش استفاده می‌کنیم.

P	Q	$P \vee (Q \wedge \sim P)$	$(P \vee Q) \wedge \sim P$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	F



چون ستون‌های آخر یکسان نیستند پس جمله‌های گزاره‌های $P \vee (Q \wedge \sim P)$ و $(P \vee Q) \wedge \sim P$ هم‌ارز نیستند.

• گزاره های قانون های منطق

اگر یک مؤلفه در یک قانون منطق باشد و این مؤلفه با یک جمله گزاره ای جایگزین شود، حاصل باز هم یک قانون منطق است. بنابراین در قانون دمورگان

$$\sim (P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q,$$

اگر P و Q را به ترتیب با جمله های گزاره ای φ و ψ عوض کنیم قانون منطق زیر به دست می آید:

$$\sim (\psi \vee \varphi) \Leftrightarrow \sim \psi \wedge \sim \varphi,$$

که باز هم به عنوان قانون دمورگان شناخته می شود.

چند قانون مهم منطق

نهی

کنند

کار

می

روند

همچنین

این

امکان

در ادامه تعدادی از قانون‌های مهم منطق آورده شده است که در آن‌ها φ ، ψ و χ نشان‌دهنده جمله‌های گزاره‌ای دلخواه هستند. این قوانین منطق به طور گسترده در برهان‌های ریاضی به کار می‌روند. همچنین این امکان را فراهم می‌کنند که قضیه‌هایی راجع به اعمال روی مجموعه‌ها به دست آوریم.

قانون‌های دمرگان (DML)

$$۱. \sim (\psi \vee \varphi) \Leftrightarrow \sim \psi \wedge \sim \varphi$$

$$۲. \sim (\psi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \sim \psi \vee \sim \varphi$$

قانون‌های جابجایی


$$۱. \psi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi \wedge \psi$$

$$۲. \psi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi \vee \psi$$


(مثال) درستی قانون های جابجایی را نشان دهید.

نهایی کننده کتر منصور موسی پور

ψ	φ	$\psi \wedge \varphi$	$\varphi \wedge \psi$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F



ψ	φ	$\psi \vee \varphi$	$\varphi \vee \psi$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F





قانون‌های شرکت‌پذیری

$$۱. \psi \vee (\varphi \vee \chi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi) \vee \chi$$

$$۲. \psi \wedge (\varphi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \wedge \chi$$



قانون‌های خودتوانی

$$۱. \psi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi$$

$$۲. \psi \vee \psi \Leftrightarrow \psi$$

قانون‌های توزیع پذیری

$$۱. \psi \wedge (\varphi \vee \chi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \chi)$$

$$۲. \psi \vee (\varphi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \chi)$$

$$۳. (\varphi \vee \chi) \wedge \psi \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\chi \wedge \psi)$$

$$۴. (\varphi \wedge \chi) \vee \psi \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\chi \vee \psi)$$

قانون نفی مضاعف (DNL)

$$1. \psi \Leftrightarrow \sim \sim \psi$$

(Double Negation Law)

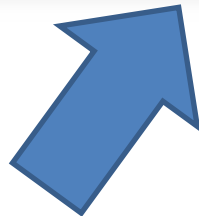
یعنی نقیض نقیض یک گزاره، هم ارز با خود آن گزاره است.

قانون راستگو

$$۱. \psi \Leftrightarrow (\text{یک گزاره راستگو}) \wedge \psi.$$

قانون تناقض

$$۱. \psi \Leftrightarrow (\text{یک تناقض}) \vee \psi.$$



قانون راستگو و قانون تناقض را با یک مثال شرح می دهیم. می دانیم که $\varphi \sim \varphi \vee$ یک راستگو است. از قانون راستگو، هم ارزی منطقی $\psi \Leftrightarrow (\varphi \sim \varphi) \wedge \psi$ به دست می آید. از سوی دیگر، $\varphi \sim \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi$ یک تناقض است. پس بنا به قانون تناقض داریم $\psi \Leftrightarrow (\varphi \sim \varphi) \vee \psi$.

قانون‌های شرطی (CL)

$$۱. (\psi \rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\sim \psi \vee \varphi)$$

$$۲. (\psi \rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \sim (\psi \wedge \sim \varphi)$$

Conditional Laws

- **تمرین** درستی قانون‌های شرطی را با جدول ارزش نشان دهید.

قانون عکس نقیض

$$۱. (\psi \rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\sim \varphi \rightarrow \sim \psi).$$

- **تمرین** درستی قانون عکس نقیض را با جدول ارزش نشان دهید.

قانون دو شرطی

$$۱. (\psi \leftrightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi).$$