

به نام خدا


مبحث:

راستگوها و تناقض ها، هم ارزهای منطقی

# راستگوها و تناقض ها

تعریف ۱.۲.۱. یک گزاره مرکب را راستگو می نامیم هرگاه ارزش راستی آن صرف نظر از ارزش راستی مؤلفه های آن، همواره درست باشد.

بنابراین یک گزاره مرکب را راستگو می نامیم اگر همواره درست باشد. به عنوان مثال، با توجه به جدول ارزش گزاره  $P \vee \sim P$  می توان دید که این گزاره، یک گزاره راستگو است.



$P$	$\sim P$	$P \vee \sim P$
$T$	$F$	$T$
$F$	$T$	$T$

**مثال)** گزاره های زیر، راستگو هستند.

الف)  $P \wedge Q \rightarrow P$  (قانون رفع مولفه)

ب)  $P \wedge Q \rightarrow Q$  (قانون رفع مولفه)

ج)  $P \rightarrow P \vee Q$  (قانون جمع)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

• حل الف)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \rightarrow Q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

• حل ب)

• حل ج)

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow P \vee Q$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

**تعریف ۲.۲.۱.** یک گزاره مرکب را **تناقض** می‌نامیم، هرگاه ارزش راستی آن صرف‌نظر از ارزش راستی مؤلفه‌های آن، همواره نادرست باشد.

بنابراین یک گزاره مرکب، تناقض است اگر و تنها اگر همواره نادرست باشد. به طور مثال گزاره مرکب  $P \wedge \sim P$  یک تناقض است.

$P$	$\sim P$	$P \wedge \sim P$
$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$



# هم ارز منطقی

یک جمله گزاره‌ای، یک گزاره مرکب یا یک مؤلفه است.

ریاضیدان‌ها اغلب از هم‌ارزهای منطقی برای ساده کردن برهان‌هایشان سود می‌برند. کاری که ما مشابه آن را در این کتاب انجام می‌دهیم. در این بخش از حروف یونانی ( $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\varphi$ ،  $\psi$  و ...) برای نمایش جمله‌های گزاره‌ای استفاده می‌کنیم.

**تعریف ۳.۲.۱.** فرض کنیم  $\varphi$  و  $\psi$  دو جمله گزاره‌ای باشند. می‌گوییم  $\varphi$  و  $\psi$  به طور منطقی هم‌ارز هستند و می‌نویسیم  $\varphi \iff \psi$  اگر شرط زیر برقرار باشد:  
برای هر ارزش راستی اختصاص داده شده به مؤلفه‌های  $\varphi$  و  $\psi$ ، ارزش راستی به دست آمده برای  $\varphi$  و  $\psi$  یکسان باشد.



مسئله ۲. نشان دهید که  $\sim (P \vee Q) \iff \sim P \wedge \sim Q$ .

حل. ابتدا جدول‌های ارزش  $\sim (P \vee Q)$  و  $\sim P \wedge \sim Q$  را تشکیل می‌دهیم.

$P$	$Q$	$P \vee Q$	$\sim (P \vee Q)$	$P$	$Q$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \wedge \sim Q$
$T$	$T$	$T$	$F$	$T$	$T$	$F$	$F$	$F$
$T$	$F$	$T$	$F$	$T$	$F$	$F$	$T$	$F$
$F$	$T$	$T$	$F$	$F$	$T$	$T$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$T$	$F$	$F$	$T$	$T$	$T$

همان‌طور که می‌بینیم، ستون‌های پایانی جدول ارزش  $\sim (P \vee Q)$  و جدول ارزش  $\sim P \wedge \sim Q$ ، یکی هستند. پس بنا به تعریف ۳.۲.۱، آن‌ها به طور منطقی هم‌ارز هستند.

- مثال: به کمک جدول ارزش ثابت کنید  $P \Leftrightarrow (\sim P \rightarrow (Q \wedge \sim Q))$ .

P
T
T
F
F

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$Q \wedge \sim Q$	$\sim P \rightarrow (Q \wedge \sim Q)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F

هر وقت  $\varphi$  و  $\psi$  به طور منطقی هم‌ارز باشند، می‌گوییم  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  یک قانون منطق است.

- به طور مثال به قانون‌های دمرگان (DML) توجه کنید:

$$۱. \sim (P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$$

$$۲. \sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$$

- **تمرین:** هم‌ارزی قانون‌های دمرگان را نشان دهید.

- تمرین:

به کمک جدول ارزش نشان دهید که  $\sim (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$ .

جدول ارزش رسم کنید و نشان دهید  $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ .