بسم الله الرحمن الرحیم

یک حبه قند یک حبه تمرین

یکی از فعالیت های انجمن علمی ریاضی پردیس بنت الهدی صدررشت

درایام تدریس مجازی و کرونا مصادف با ماه مبارک رمضان ۱۳۹۹

حل تمرین درس مبانی ریاضیات رشته آموزش ریاضی

استاد مربوطه : سرکارخانم دکتر منصوره موسی پور

تدوین و ویرایش : سمیه برخورداری

سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۳۹۸

ترم تحصیلی۲

فصل دوم {آشنایی با استدلال واثبات در ریاضیات}

مباحث و تهیه کنندگان به ترتیب موضوع:

{مبحث استدلال استنتاجی}

با همکاری دانشجو : کیمیا دیندار

{مبحث استقرای تعمیم یافته و برهان خلف}

با همکاری دانشجو : هانیه قهوه چی

تمرین ۱:با استفاده از روش حالتها ثابت کنید$n(n+1)$ همواره بر ۲ بخش پذیر است که درآن n عدد طبیعی است.

اگر $n=2k \longrightarrow n(n+1)=2k(2k+1)$

$=2(k(2k+1))=2m$ بر ۲ بخش پذیر است.

اگر $n=2k+1 \longrightarrow n(n+1)=(2k+1)((2k+1)+1)=(2k+1)(2k+2)$

$=2((2k+1)(k+1))=2r$ بر۲بخش پذیر است.

تمرین ۲:اگر $a\geq -1$ و $n \in \mathbb{N}$ ،انگاه به کمک استقرای ریاضی درستی رابطه ی زیر را ثابت کنید:

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

$n=1 \quad (1+a)^1 \geq 1+a$ (مبنای استقرا)

$n=k \quad (1+a)^k \geq 1+ka$ (فرض استقرا)

$n=k+1 \quad (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$ (حکم استقرا)

باید حکم استقرا را ثابت کنیم.

از طرفی:

$$(1+a)^{k+1}=(1+a)^k(1+a)$$

$\geq (1+\mathrm{ka})(1+\mathrm{a})$ (بنابر فرض استقرا) *

$= \underbrace{ka^2}_{\geq 0} + a(k+1) + 1$

$\geq 1+(\mathrm{k}+1)\mathrm{a}$

*(توجه کنید که بنابر فرض استقرا $(1+a)^k \geq 1+\mathrm{k}a$.از طرفی چون $a\geq -1$ پس $a+1\geq 0$. بنابراین $(1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a)$)

تمرین۳:نامساوی مثلث برای دو عدد حقیقی a وb به صورت $|a+b| \leq |a| + |b|$ برقرار است. با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر nعددحقیقی x_1 و x_2 و ... ، x_n داریم:

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

n=1 $|x_1| \leq |x_2|$ n=2 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_1|$

(بنابه نامساوی مثلث برقرار است)

n=k $|x_1 + x_2 + \ldots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|$ فرض استقرا

n=k+1 $|x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| + |x_{k+1}|$ حکم استقرا

باید حکم استقرا را ثابت کنیم.از طرفی:

$|x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| + |x_{k+1}|$

بنابر نامساوی مثلثی $\leq |(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)| + |x_{k+1}|$

بنابر فرض استقرا $\leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| + |x_{k+1}|$

تمرین۱ :ابتدا عدد طبیعی مناسب m را بیابید و سپس برای هر عدد طبیعی n(n≥ m) ثابت کنید:

$$2^n > n^2$$

حل)

m = 5 $\quad 2^5 > 5^2$

p(k): $\quad 2^k > k^2 \quad (k \geq 5)$ (فرض استقرا)

p(k+1): $\quad 2^{k+1} > (k+1)^2$ (حکم استقرا)

از طرفی داریم:

$2^{k+1} = 2^k \times 2 > k^2 \times 2 = k^2 + k^2$ (فرض استقرا)

$> k^2 + (2k+1)$ (مثال صفحه ۷ جزوه)

$= (k+1)^2$

تمرین۲ :نشان دهید $\sqrt{3}$ گنگ است.

حل)

فرض کنیم (فرض خلف) $\sqrt{3}$ گویا باشد. پس p و q وجود دارند که $q = 0$ و (p,q)=1 و $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$.

بنابراین $\frac{p^2}{q^2} = 3$ ، یعنی $p^2 = 3q^2$ (⁕) . بنابراین p^2 و در نتیجه p مضرب ۳ است . پس k وجود دارد که $p = 3k$. پس $p^2 = 9k^2$. با جایگذاری در ⁕ داریم:

$9k^2 = 3q^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2$

پس q^2 و در نتیجه q مضرب ۳ است ※ (چون $(p , q) = 1$).

تمرین۳: ثابت کنید اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، n نیز مضربی از ۳ است.

حل)

فرض کنیم (فرض خلف) n مضرب ۳ نباشد پس n=3k+1 یا n=3k+2 .

الف) $n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3m + 1$ ※ مضرب ۳ نیست

ب) $n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3t + 1$ ※ مضرب ۳ نیست

پس فرض خلف باطل میشود و n باید مضرب ۳ باشد.